

Wir betrachten unbestimmte Integrale der Form  $F_n(x) = \int \sqrt{x^{3n-2} + a \cdot x^{2n-2}} dx$  mit  $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Eine nachliegende Idee wäre es, den Radikanden zu substituieren,  $u = x^{3n-2} + a \cdot x^{2n-2}$ ; damit wird es dann aber sehr schwierig, das Differenzial  $dx$  umrechnen, und das Integral wird eher schwieriger statt einfacher. Stattdessen ist es sinnvoller, zunächst die Wurzel zu vereinfachen, konkret: partiell zu radizieren:

$$\sqrt{x^{3n-2} + a \cdot x^{2n-2}} = \sqrt{x^{2n-2}(x^n + a)} = x^{n-1} \sqrt{x^n + a}$$

(Hier wurde vorausgesetzt, dass  $x^{n-1} \geq 0$  ist. Für  $x^{n-1} < 0$  würde sich als Faktor vor der Wurzel  $-x^{n-1}$  ergeben; falls außerdem auch noch 0 im Integrationsintervall liegt, muss man das Integral aufteilen in die Bereiche mit  $x^{n-1} \geq 0$  bzw.  $x^{n-1} < 0$ .)

Nun ist es sinnvoll, den Radikanden zu substituieren,  $u = x^n + a$ , denn dann ergibt sich  $du = nx^{n-1} dx$ , und das Integral wird einfach zu

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3n} u^{3/2} + C = \frac{2}{3n} (x^n + a)^{3/2} + C$$

Fertig!

*(Auf diese Integrale bin ich nicht ganz von selbst gekommen. Als Anregung hatte ich ein Video, in dem der Spezialfall  $\int \sqrt{x^{13} + x^8} dx$  als Aufgabe gestellt wurde; dies habe ich nach einigem Probieren selbstständig gelöst und dann eben verallgemeinert.)*